Theoretische Untersuchung von schnell ansprechenden Wärmezählern für WWB im Durchflussbetrieb

(time dependent behaviour of fast response heat meters)

- A. Kähler, PTB-Sommerschule, Seeon 2015-

Ziel:

Ermittlung des theoretischen zeitlichen Referenzverlaufs der erfassbaren Wärmemenge in Abhängigkeit der maßgeblichen Verzögerungsglieder

und Vergleich mit

dem zeitlichen Verlauf des Berechnungsergebnisses nach Abtastung und Integration im WZ-Rechenwerk

Betrachteter Arbeitspunkt:

Feste Vorlauftemperatur:

$$\vartheta_{VL} = \vartheta_{VL}^{\infty} = 60°C$$

Feste Raumlufttemperatur:

$$\vartheta_{Raum} = \vartheta_{Raum}^{\infty} = 20°C$$

Konstanter Volumenstrom ab Sprungzeitpunkt:
(entspricht annähernd der Steuerungspraxis mit Magnetventilen)

$$\dot{V}^{\infty} = 1{,}0 \ldots 1{,}5\; cbm/h$$

Aus $\dot{Q}^{\infty} = k \cdot \dot{V}^{\infty} \cdot \Delta\vartheta^{\infty}$ folgt dann für die stationäre Temperaturdifferenz:

$$\Delta\vartheta^{\infty} = \vartheta_{VL} - \vartheta_{RL}^{\infty} = \frac{\dot{Q}^{\infty}}{k \cdot \dot{V}^{\infty}}$$

Für $\dot{V}^{\infty} = 1{,}0\; cbm/h$ folgt beispielsweise:

$\dot{Q}^{\infty}[kW]$	25 30 35
$\vartheta_{RL}^{\infty}[\cdot °C]$	45,6 42,8 39,9

Ermittlung der Zeitverläufe:

Vorlauf-Temperaturfühler:

$$\vartheta_{VLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \left(\vartheta_{VL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}\right) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_F}\right), \qquad \tau_F \text{ - Zeitkonstante Temperaturfühler}$$

Rücklauf-Temperaturfühler (hier: gleiche Zeitkonstante wie Vorlauf):

$$\vartheta_{RLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \left(\vartheta_{RL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}\right) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_F}\right) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_{WÜT}}\right)$$

$$\vartheta_{RLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \left(\vartheta_{RL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}\right) \cdot \left(1 - e^{-t/\tau_{WÜT}} - e^{-t/\tau_F} + e^{-t/\tau_F} \cdot e^{-t/\tau_{WÜT}}\right)$$

$\tau_{WÜT}$ - Zeitkonstante Wärmeübertager

Zwischenrechnung:

$$e^{-t/\tau_F} \cdot e^{-t/\tau_{WÜT}} = \exp\left(-\frac{t}{\tau_F} - \frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) = \exp\left(\frac{-t \cdot \tau_F - t \cdot \tau_{WÜT}}{\tau_F \cdot \tau_{WÜT}}\right) = \exp\left(-t \cdot \frac{\left(\tau_F + \tau_{WÜT}\right)}{\tau_F \cdot \tau_{WÜT}}\right)$$

$$\vartheta_{RLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \left(\vartheta_{RL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) + \exp\left(-t \cdot \frac{\tau_F + \tau_{WÜT}}{\tau_F \cdot \tau_{WÜT}}\right)\right)$$

Mit Einführung der Übertemperaturen:

$$\Delta \vartheta_{VL} = \vartheta_{VL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}$$

$$\Delta \vartheta_{RL}^{\infty} = \vartheta_{RL}^{\infty} - \vartheta_{Raum}$$

und der Kombi-Zeitkonstante:

$\dfrac{\tau_F + \tau_{WÜT}}{\tau_F \cdot \tau_{WÜT}} = \dfrac{1}{\tau_a}$ bzw. $\tau_a = \dfrac{\tau_F \cdot \tau_{WÜT}}{\tau_F + \tau_{WÜT}}$

folgt:

$$\vartheta_{VLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \left(\Delta \vartheta_{VL} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)\right)\right) = \vartheta_{Raum} + \Delta \vartheta_{VL} - \Delta \vartheta_{VL} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)$$

$$\vartheta_{RLT}(t) = \vartheta_{Raum} + \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} - \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) - \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) + \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

Und damit für die Temperaturdifferenz

$$\Delta \vartheta = \vartheta_{VL} - \vartheta_{RL}$$

$$\Delta \vartheta(t) = \vartheta_{Raum} + \Delta \vartheta_{VL} - \Delta \vartheta_{VL} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) - \vartheta_{Raum} - \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} + \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) + \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) - \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

$$\Delta \vartheta(t) = \left(\vartheta_{VL} - \vartheta_{RL}^{\infty}\right) - \left(\vartheta_{VL} - \vartheta_{RL}^{\infty}\right) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) + \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) - \Delta \vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

Mit Einführung der stationären Temperaturdifferenz

$$\Delta\vartheta^{\infty} = \vartheta_{VL} - \vartheta_{RL}^{\infty}$$

folgt dann

$$\Delta\vartheta(t) = \underbrace{\Delta\vartheta^{\infty}}_{a} \underbrace{- \Delta\vartheta^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)}_{b} \underbrace{+ \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right)}_{c} \underbrace{- \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)}_{d}$$

$$\Delta\vartheta(t) = a - b + c - d$$

Bei konstantem Massestrom ab Sprungzeitpunkt folgt dann für das Energieäquivalent (Temperaturdifferenz Vor-/Rücklauf):

$$|E(t) \approx \int \Delta\vartheta(t)dt = \int adt - \int bdt + \int cdt - \int gdt$$

$$\int adt = \int \Delta\vartheta^{\infty} dt = \Delta\vartheta^{\infty} \cdot t$$

$$\int bdt = \Delta\vartheta^{\infty} \cdot \int \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) dt = -\Delta\vartheta^{\infty} \cdot \tau_F \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)$$

$$\int cdt = \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \int \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) \cdot dt = -\Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_{WÜT} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right)$$

$$\int ddt = \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \int \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right) = -\Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_a \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

<u>Ergebnis:</u>

$$E(t) = \Delta\vartheta^{\infty} \cdot t + \Delta\vartheta^{\infty} \cdot \tau_F \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right) - \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_{WÜT} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right) + \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_a \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)$$

$$E\Big|\underbrace{(\Delta t = t_1 - t_0)}_{\int a} = \Big|\underbrace{\Delta\vartheta^{\infty} \cdot \Delta t \Delta\vartheta^{\infty} \cdot \tau_F \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_F}\right)}_{\int b}\Bigg|_{t0}^{t1} \underbrace{- \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_{WÜT} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{WÜT}}\right)}_{\int c}\Bigg|_{t0}^{t1} \underbrace{+ \Delta\vartheta_{RL}^{\infty} \cdot \tau_a \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_a}\right)}_{\int d}\Bigg|_{t0}^{t1}$$

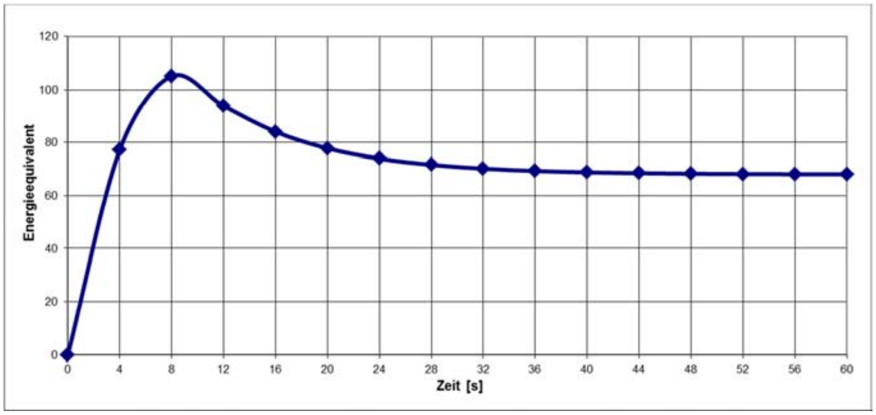
E(t) wird betrachtet als Referenzgröße für Bewertung der Berechnung im WZ-Rechenwerk

$$E_{WZ}(t) = \frac{1}{k \cdot (t_1 - t_0) \cdot \overline{V}} \int_0^t k(\tau) \cdot \dot{V}(\tau) \cdot \Delta\vartheta(\tau) d\tau$$

mit numerischen Integrationsverfahren (z.B. Rechteck/Euler oder Trapez/Runge-Kutta).

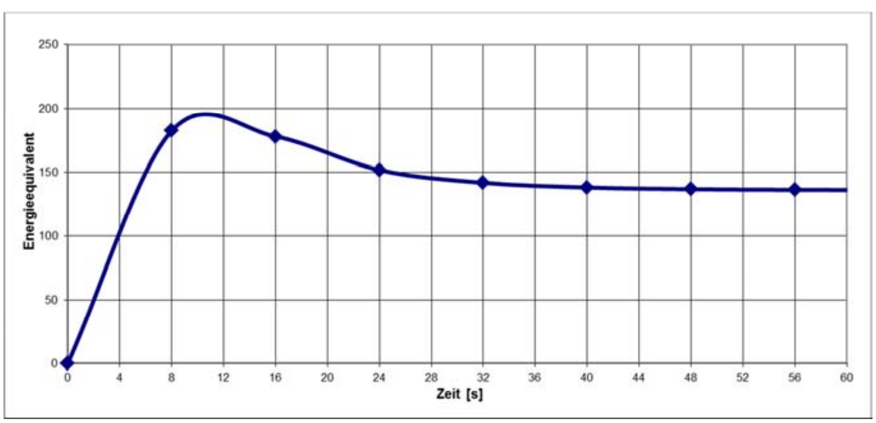
Vergleich und Auswertung per Berechnung in Excel oder Matlab. Vorläufiges Ergebnis:

Parameter:		
Zeitkonstante Tau_Fühler=	2	[s]
Zeitkonstante Tau_Wärmeübertrager	8	[s]
T_Raum=	20	[°C]
T_VL=	60	[°C]
T_RL=	43	[°C]
Mess- und Integrationsintervall=	**4**	**[s]**
Zapfdauer=	60	[s]



Gesamtfehler Trapez:	**-2,1%**

Parameter:		
Zeitkonstante Tau_Fühler=	2	[s]
Zeitkonstante Tau_Wärmeübertrager	8	[s]
T_Raum=	20	[°C]
T_VL=	60	[°C]
T_RL=	43	[°C]
Mess- und Integrationsintervall=	**8**	**[s]**
Zapfdauer=	80	[s]



Gesamtfehler Trapez:	**-7,3%**